Representación gráfica de funciones

Gráfica de una fución

La gráfica de una función está formada por el conjunto de puntos (x, y) para todos los valores de x pertenecientes al Dominio de la función

gráfica (f) = {(x, f(x)) / $\forall$ x $\in$D}

Para representarla calcularemos aquellos puntos o intervalos donde la función tiene un comportamiento especial, que determinaremos mediante el estudio de los siguientes apartados:

1. ***Dominio de una función.***
2. ***Simetría.***
3. ***Periodicidad.***
4. ***Puntos de corte con los ejes.***
5. ***Asíntotas.***
6. ***Ramas parabólicas.***
7. ***Crecimiento y Decrecimiento.***
8. ***Máximos y mínimos.***
9. ***Concavidad y convexidad.***
10. ***Puntos de inflexión.***

Dominio de una función

El dominio de una función está formado por todos los elementos que tienen imagen.

D = {x $\in \mathbb{R}$/ $\exists$f (x)}

Cálculo del dominio de una función

Dominio de la función polinómica

El dominio de una función polinómica es $\mathbb{R}$

$f(x)= x^2 - 5x + 6$ **D=R**

Dominio de la función racional

El dominio es $\mathbb{R}$menos los valores que anulan al denominador.

$$f(x) = \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 6}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $D = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Dominio de la función radical de índice impar

El dominio es R.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ $D = \mathbb{R}$

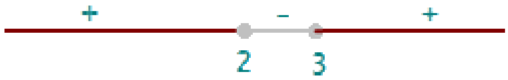
$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 5x + 6}}$ $D = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Dominio de la función radical de índice par

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \qquad D = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 4}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (-\infty, 2] \cup [3, \infty) \\ x \neq -4 \end{matrix}$$

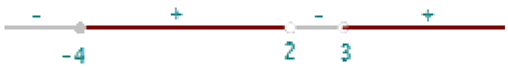
$$D = (-\infty, -4) \cup (-4, 2] \cup [3, \infty)$$

$$f(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x + 4}{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\frac{x + 4}{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \qquad D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$$



Dominio de la función logarítmica

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor que cero.

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

Dominio de la función exponencial

D = $\mathbb{R}$

Dominio de la función seno

D = $\mathbb{R}$**.**

Dominio de la función coseno

D = $\mathbb{R}$.

Dominio de la función tangente

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Dominio de la función cotangente

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$$

Dominio de la función secante

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Dominio de la función cosecante

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$$

Dominio de operaciones con funciones

$$D(f+g) = D(f-g) = D(f\cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

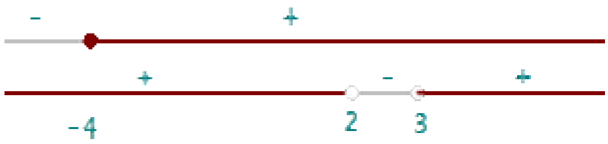
$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 & [-4, \infty) \\ x^2 - 5x + 6 > 0 & (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \end{cases}$$

$$D = (-\infty, -4] \cup (3, \infty)$$



Simetría de una función

Simetría respecto del eje de ordenadas

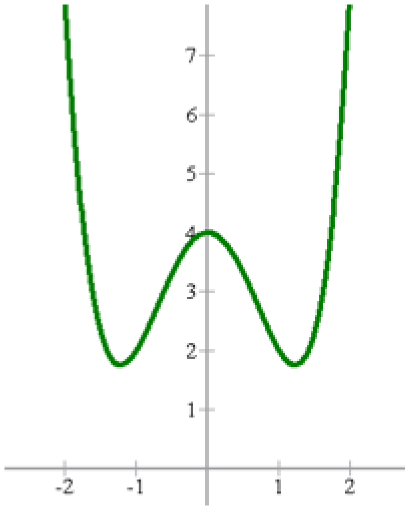
Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas si ésta es una **función par**, es decir:

f(-x) = f(x)

Ejemplo:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

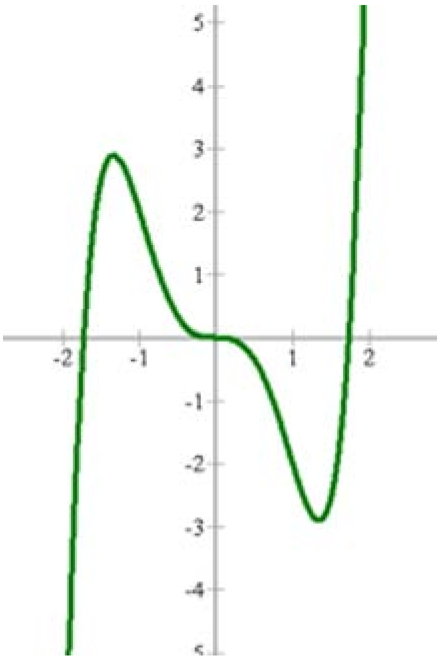
$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$$



Simetría respecto al origen

Una función f es simétrica respecto al origen si ésta es una **función impar**, es decir:

f(-x) = -f(x)



Funciones periódicas

Periodicidad de una función

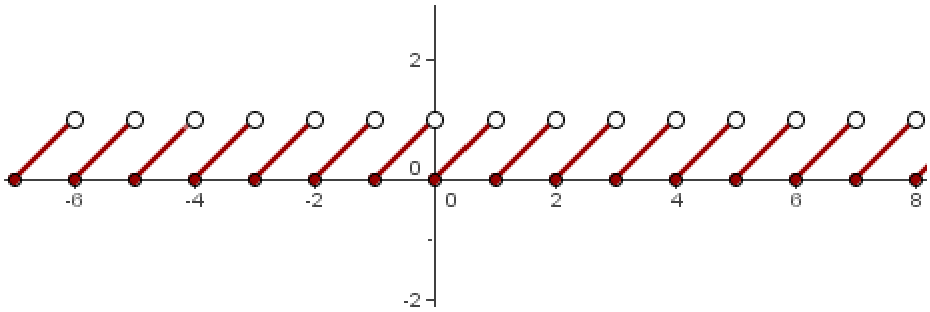
Una **función** es **periódica** cuando:

$$\exists T \in \mathbb{R} \,/\, f(x + T) = f(x), \forall x \in D$$

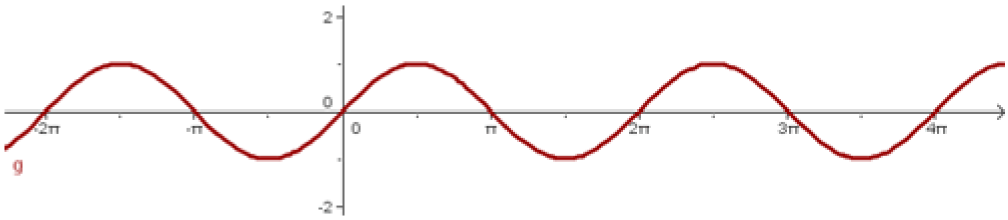
La función se repite de T en T, siendo **T el período**.

Ejemplos:

La función f(x) = x − E(x), es periódica de periodo 1.



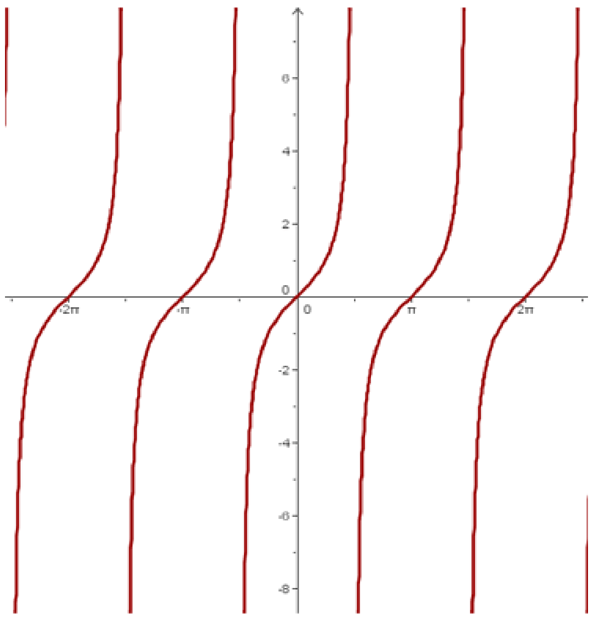
sen (x + 2π) = sen x



En el caso de la función seno T = 2π

tg (x + π) = tg x

En el caso de la función tangente T = π



Si f es periódica de período T, también lo es f(mx +n), y su período es T/m.

Ejemplos

Hallar el periodo de las funciones:

1f(x) = sen 2x

$$T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2f(x) = tg (1/2)x

$$T' = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

3f(x) = E (1/2)x

$$T' = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con el eje OX

Para hallar los **puntos de corte con el eje de abscisas** hacemos **y = 0 y resolvemos la ecuación resultante.**

Ejemplo:

Hallar los **puntos de corte con el eje OX** de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2$$

$$x^3 - x^2 = 0 \qquad x(x^2 - 1) = 0$$

$$(-1,0) \qquad (0,0) \qquad (1,0)$$

Punto de corte con el eje OY

Para hallar el **punto de corte con el eje de ordenadas** hacemos **x = 0** y calculamos el valor de **f(0)**.

Ejemplo:

Hallar el **punto de corte con el ejes OY** de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5$$

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 5 = 5 \qquad (0,5)$$

Ejemplo de puntos de corte con los ejes

Hallar los **puntos de corte con los ejes** de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

Puntos de corte con el eje OX

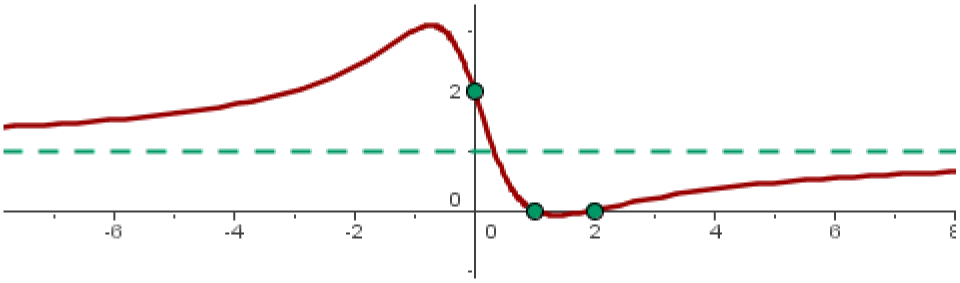
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0 \qquad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$(2,0)$ $(1,0)$

Puntos de corte con el eje OY

$$f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{0^2 + 1} = 2$$

$(0,2)$



Asíntotas

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente. Hay tres tipos:

Asíntotas horizontales

La recta y=k es una asíntota horizontal si se cumple que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

$$\text{ó} \qquad\qquad y = k$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

Una función puede tener **hasta dos asíntotas horizontales**, correspondientes a cada uno de los límites.

Ejemplo:

Calcular las **asíntotas horizontales** de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-1}=2 \qquad\qquad y=2$$

Asíntotas verticales

La recta x=k es una asíntota horizontal de la función f(x) si se cumple que:

$$\lim_{x\to k}f(x)=\pm\infty \qquad\qquad x=k$$

Los valores de K hay que buscarlos en los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

Una función puede tener **infinitas asíntotas verticales** (por ejemplo la función tangente)

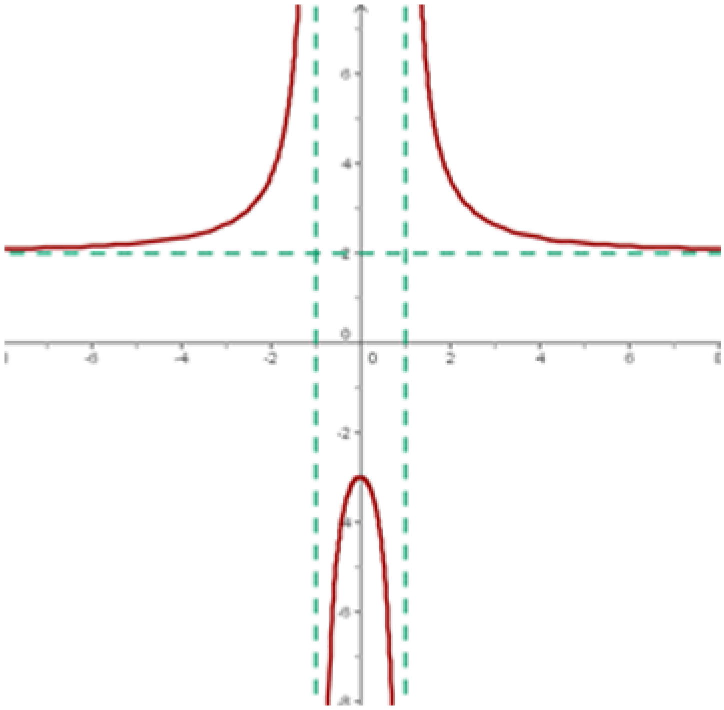
Ejemplo:

Calcular las **asíntotas horizontales y verticales** de la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3}{x^2-1}=\infty \qquad\qquad x=-1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3}{x^2-1}=\infty \qquad\qquad x=-1$$



Asíntotas oblicuas

Una asíntota vertical tiene por ecuación y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad\qquad n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$$

Sólo existen **asíntotas oblicuas** cuando **no haya asíntotas horizontales**.

Una función puede tener **hasta dos asíntotas oblicuas**, correspondientes a cada uno de los límites $(+\infty\ y - \infty)$.

Ejemplo

Calcular las **asíntotas** de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-2} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales

Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2}{x-2} = \infty$$

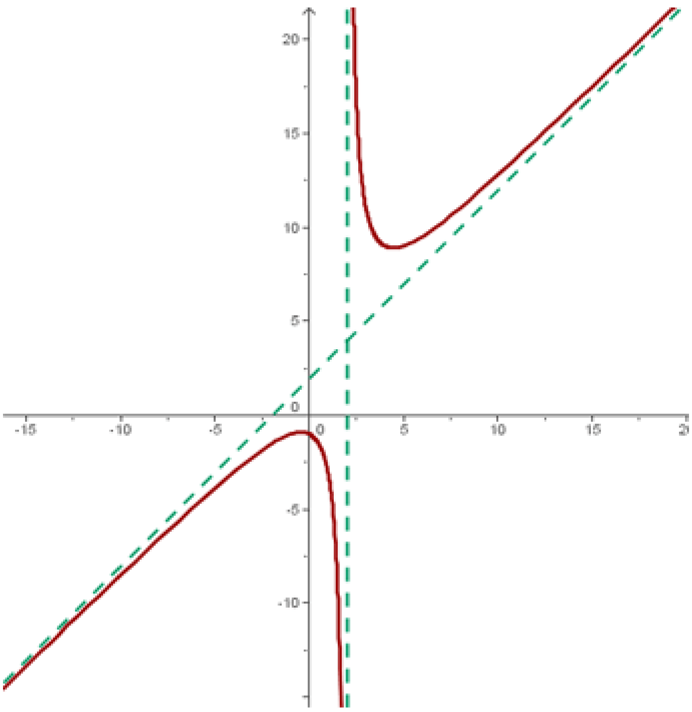
$x = 2$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-2} = 2$$

$y = x + 2$



Ramas parabólicas

Las **ramas parabólicas** se estudian sólo si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad ó \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

Rama parabólica en la dirección del eje OY

Se dice que f tiene una **rama parabólica en la dirección del eje OY** cuando:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

Esto quiere decir que la gráfica se comporta como una parábola de eje vertical.

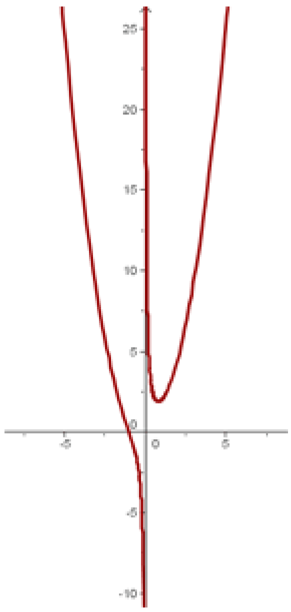
Ejemplo

Estudiar las **ramas parabólicas** de la función:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x}}{x} = \frac{x^3+1}{x^2} = \infty$$

Tiene una **rama parabólica en la dirección del eje OY**.



Rama parabólica en la dirección del eje OX

Se dice que f tiene una **rama parabólica en la dirección del eje OX** cuando:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Esto quiere decir que la gráfica se comporta como una parábola de eje horizontal.

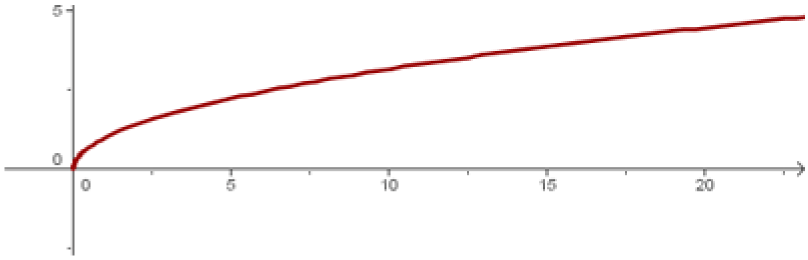
Ejemplo

Estudiar las **ramas parabólicas** de la función:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

Tiene una **rama parabólica en la dirección del eje OX**.



Crecimiento y decrecimiento

Crecimiento en un punto

Si f es derivable en a:

f es estrictamente creciente en a si:

f'(a) > 0

Decrecimiento en un punto

Si f es derivable en a:

f es estrictamente decreciente en a si:

f'(a) < 0

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para hallar el **crecimiento y decrecimiento** seguiremos los siguientes pasos:

1. Derivar la función.

2. Obtener las raíces de la derivada primera, para ello hacemos: f'(x) = 0.

3. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) d**e la derivada primera y los puntos de discontinuidad** (si los hubiese)

4. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada primera.

Si f'(x) > 0 es creciente.

Si f'(x) < 0 es decreciente.

5. Escribimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejemplo

Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2 = 0 \qquad x = 1 \qquad D = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$x = 0 \qquad x = 3$

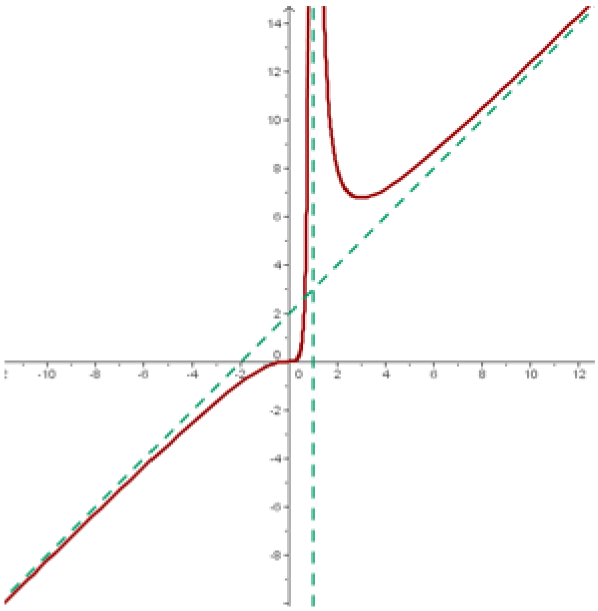
x	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Creciente

$(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (3, \infty)$

Decreciente

$(1,3)$



Máximos y mínimos

Extremos relativos

Si f es derivable en a, **a es un extremo relativo** o local si:

1. **Si f'(a) = 0**.

2. **Si f''(a) ≠ 0**.

Máximos relativos

Si f y f' son derivables en a, **a** es un **máximo relativo** si se cumple:

1. $f'(a) = 0$

2. $f''(a) < 0$

Mínimos relativos

Si f y f' son derivables en a, **a** es un **mínimo relativo** si se cumple:

1. $f'(a) = 0$

2. $f''(a) > 0$

Cálculo de máximos y mínimos

Para hallar los **extremos locales** seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera y calculamos sus raíces.

2. Realizamos la 2ª derivada, y calculamos el signo que toman en ella las raíces de derivada primera y si:

$f''(a) < 0$ es un **máximo** relativo

$f''(a) > 0$ es un **mínimo** relativo

3. Calculamos la imagen (en la función) de los extremos relativos.

Ejemplo

Calcular los **máximos y mínimos** de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6$ Máximo

$f''(1) = 6$ Mínimo

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

Máximo(−1, 4) Mínimo(−1, 0)

Si ya hemos estudiado el crecimiento y decrecimiento de una función habrá:

1. Un **máximo** en el punto, de la función, en la que ésta pasa **de creciente a decreciente.**

2. Un **mínimo** en el punto, de la función, en la que ésta pasa **de decreciente a creciente**.

Ejemplo

Hallar los **máximos y mínimos** de:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$(x-1)^2=0 \qquad x=1 \qquad D=\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0$$

$x=0 \qquad x=3$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Tenemos un mínimo en x = 3

$$f(3)=\frac{3^3}{(3-1)^2}=\frac{27}{4}$$ **Mínimo(3, 27/4)**

En x = 1 no hay un máximo porque x = 1 no pertenece al dominio de la función.

Concavidad y convexidad

Si f y f' son derivables en a, a es:

Cóncava

Si f''(a) > 0

Convexa

Si **f''(a) < 0**

Intervalos de concavidad y convexidad

Para calcular los **intervalos la concavidad y convexidad** de una función seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

2. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).

3. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si f''(x) > 0 es cóncava.

Si f''(x) < 0 es convexa.

4. Escribimos los intervalos:

Ejemplo

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2=0 \qquad x=1 \qquad D=\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0$$

$$f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4}=0$$

$x=0$

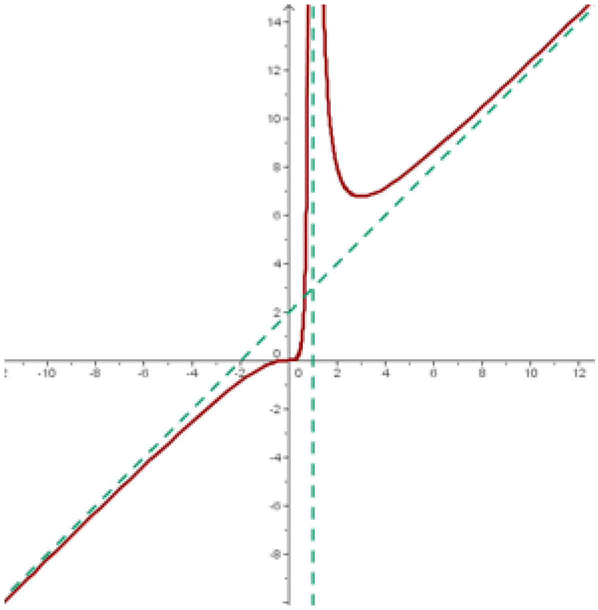
x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Cóncava

$(0,1)\cup(1,\infty)$

Convexa

$(-\infty,0)$



Puntos de inflexión de una función

Si f y f' son derivables en a, a es un:

Punto de inflexión

Si **f'' = 0**

y **f''' ≠ 0**

Cálculo de los puntos de inflexión

Para hallar los **puntos de inflexión**, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

2. Realizamos la derivada tercera, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada segunda y si:

f'''(x) ≠ 0 Tenemos un punto de inflexión.

3. Calculamos la imagen (en la función) del punto de inflexión.

Ejemplo

Hallar los **puntos de inflexión** de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

f''(x) = 6x 6x = 0 x = 0.

f'''(x) = 6 Será un punto de inflexión.

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

Punto de inflexión: (0, 2)

Si ya hemos estudiado la concavidad y convexidad de una función habrá:

Puntos de inflexión en los puntos en que ésta pasa **de cóncava a convexa o viceversa.**

Ejemplo

Calcular los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2 = 0 \qquad x = 1 \qquad D = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$$

$x = 0$

x	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Tenemos un **punto de inflexión en x = 0**, ya que la función pasa de convexa a concava.

$$f(o) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = 0$$

Punto de inflexión (0, 0)

Ejemplo de representación de una función

Vamos a representar la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Dominio

$1 + x^2 = 0$ $\qquad D = \mathbb{R}$

Simetría

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -f(x)$$

Simetría respecto al origen.

Puntos de corte con los ejes

Punto de corte con OY:

$\dfrac{x}{1+x^2} = 0$ $\qquad (0,0)$

Puntos de corte con el eje OY

$(0,0)$

Asíntotas

Asíntota horizontal

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ $\qquad y = 0$

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \qquad x=\pm 1$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$\text{Creciente}:(-1,1)$

$\text{Decreciente}:(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Mínimos

$\text{Mínimo}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

Máximos

$\text{Máximo}\left(1,\frac{1}{2}\right)$

Concavidad y convexidad

$$f''(x)=\frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} \qquad \frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3}=0 \qquad x=0 \qquad x=\pm\sqrt{3}$$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$\text{Cóncava}:\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$

$\text{Convexa}:\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$

Puntos de inflexión

$\text{Puntos de inflexión}:\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)(0,0) \qquad \left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Representación gráfica